Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

III етап

7 клас

Рівень «Б»

1. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2013$.

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.

3. Андрійко, Миколка, Оленка, Сергійко й Даринка посіли п'ять перших місць на математичній олімпіаді (жодне з місць не було розділено між декількома учасниками). Кожен з них знає, яке місце він зайняв. Оленка знає, що різниця місць Сергійка й Андрійка (у вказаному порядку) дорівнює двом. Також вона знає, що Даринка зайняла не перше місце, і тому Оленка може відновити розподіл місць між цією п'ятіркою учасників олімпіади. Яке місце зайняла Даринка?

4. Петрик послідовно виписує в рядок на дошці остачі від ділення деякого натурального числа на 10, 11, 12, … , 20. Виявилося, що кожне наступне записане число більше за попереднє. Доведіть, що в рядку записано 11 *послідовних* цілих чисел (тобто кожне наступне число більше за попереднє на 1).

5. Прямокутне приміщення розділене на 16 прямокутних кімнат. Комендант виміряв периметри восьми кімнат. Сім з восьми результатів його вимірювань *схематично* (тобто без урахування справжніх розмірів кімнат) показано на малюнку праворуч, а результат восьмого позначено через x. Знайдіть значення x.

7		13	
		10	7
10	11		
	5		x

20 січня 2013 р.

На виконання завдання відводиться 4 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів забороняється.

Розв'язання задач будуть розміщені на сторінці «Юному математику» сайта механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
http://www.mechmat.univ.kiev.ua/u/school

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

III етап

8 клас

Рівень «Б»

1. Чебурашка та Крокодил Гена з'їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З'ясувалося, що вони з'їли порівну. За який час Чебурашка сам з'їв би цей торт?

2. Керівник математичного гуртка дав учням завдання виписати в порядку зростання всі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, в яких $1 \le a < b < c < d \le 9$. Яке число буде записаним на 53-му місці?

3. На дошці написані числа 1, 2, 3, ... , 4027, 4028. Миколка та Андрійко по черзі закреслюють числа, причому Миколка ходить першим. За один хід можна закреслити тільки одне з раніше незакреслених чисел. Андрійко хоче, щоб після його 2013-го ходу на дошці залишилися два *послідовні* числа (тобто числа, різниця яких дорівнює 1). Чи завжди він зможе цього досягти?

4. Дано гострокутний трикутник ABC. Кола k_1 і k_2 проходять через вершину A і дотикаються до прямої BC в точках B і C відповідно. Висота BK трикутника ABC перетинає коло k_1 у точці P, відмінній від B, а висота CL перетинає коло k_2 в точці Q, відмінній від C. Доведіть, що точки A, P і Q лежать на одній прямій.

5. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, для яких число $p^3 + q^2$ є кубом деякого натурального числа.

20 січня 2013 р.

На виконання завдання відводиться 4 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів забороняється.

Розв'язання задач будуть розміщені на сторінці «Юному математику» сайта механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка http://www.mechmat.univ.kiev.ua/u/school

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

III етап

9 клас
Рівень «Б»

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то отримаємо друге число. Знайдіть усі такі пари чисел.

2. Відомо, що $a \neq b$ та рівняння $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ і $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a + b$.

3. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, $AD > BC$, діагоналі AC і BD перетинаються в точці E. Дотична до описаного кола трикутника BCE, проведена в точці E, перетинає пряму AD в точці F, причому точка D лежить між точками A і F. Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка EF.

4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність
$$\frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} \le \frac{z-x}{2}.$$

5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30×30 і запропонував учням заповнити її числами 1, 2, … , 900, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувались раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

20 січня 2013 р.

На виконання завдання відводиться 4 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів забороняється.

Розв’язання задач будуть розміщені на сторінці «Юному математику» сайта механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
http://www.mechmat.univ.kiev.ua/u/school

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

III етап

10 клас
Рівень «Б»

1. Чи можна зобразити на прямій шість відрізків так, щоб серед будь-яких трьох зображених відрізків знайшлися принаймні два, які мають хоча б одну спільну точку, і кожна точка прямої належала щонайбільше трьом зображеним відрізкам? (Вважається, що кінці відрізків належать самим відрізкам.)

2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність $mn-\sqrt{m^2+n^2}=7$.

3. Відомо, що додатні дійсні числа x і y задовольняють нерівність $2x+7y\le 14$. Доведіть, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 3$.

4. Нехай H — точка перетину висот AQ, BL і CP гострокутного трикутника ABC, K — спільна точка відрізків PQ і BH, M — середина сторони AC, N — середина відрізка BH. Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC в точці D, відмінній від B. Відомо, що $KQ=HQ$. Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.

5. По колу записали 672 натуральних числа a_1, a_2, … , a_{672} таких, що $a_1+a_2+...+a_{672}=2013$ і $a_k\ne 1342$ для всіх k, $1\le k\le 672$. Доведіть, що завжди можна вибрати декілька записаних поспіль чисел, сума яких дорівнює 1342.

20 січня 2013 р.

На виконання завдання відводиться 4 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів забороняється.

Розв'язання задач будуть розміщені на сторінці «Юному математику» сайта механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
http://www.mechmat.univ.kiev.ua/u/school

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики
III етап

11 клас
Рівень «Б»

1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок, координати яких задовольняють рівність

$$\sin x + \cos y = \sin y + \cos x .$$

2. Розв’яжіть рівняння

$$x^{2013} - x^{2014} = \left\{ \frac{2015 + x}{1 + [x]} \right\}$$

(тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\} = a - [a]$ — дробова частина числа a).

3. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $BC = 25$ см, $AC = 39$ см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC, перетинає висоту AD цього трикутника в точці P. Знайдіть довжину відрізка AP.

4. Знайдіть усі такі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f, що для будь-яких $x \in \mathbf{R}$ і $y \in \mathbf{R}$ має місце рівність

$$f\left(xf\left(y\right)\right) + f\left(y + f\left(x\right)\right) - f\left(x + yf\left(x\right)\right) = x .$$

5. Нехай x_1 — довільне дійсне число, і для всіх натуральних n виконується рівність

$$x_{n+1} = \sqrt{7}\, x_n + 2\sqrt{x_n^2 + 4} .$$

Доведіть, що серед чисел x_1, x_2, … , x_{2013} принаймні 1005 чисел є ірраціональними.

20 січня 2013 р.

На виконання завдання відводиться 4 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів забороняється.

Розв’язання задач будуть розміщені на сторінці «Юному математику» сайта механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
http://www.mechmat.univ.kiev.ua/u/school